

## 令和9年度 専攻科入学者選抜（学力）試験問題

数 学

No. 1 / 4

【1】平面  $\mathbb{R}^2$  上の線形変換  $S, T$  を次のように定める

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-y \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+y \\ x+4y \end{pmatrix}$$

[ 配点 20 点 ]

また、演算子  $[S, T]$  を  $[S, T] = S \circ T - T \circ S$  で定義する。次の各設問に答えよ。(1) 線形変換  $S, T$  の表現行列をそれぞれ  $A, B$  とするとき、 $A, B$  を求めよ。

$$\text{与式より, } A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

[ 小点 6 点 ]

(2) 合成変換  $S \circ T, T \circ S$  の表現行列をそれぞれ求めよ。

$$S \circ T \text{ の表現行列は } AB = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad T \circ S \text{ の表現行列は } BA = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

[ 小点 6 点 ]

(3) 演算子  $[S, T]$  の表現行列  $C$  を求めよ。

$$C = AB - BA = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

[ 小点 4 点 ]

(4) (3) で求めた行列  $C$  に対して、 $C^{2026}$  を求めよ。

$$C^2 = -\frac{4}{5}E \text{ より, } C^{2026} = (C^2)^{1013} = \left(-\frac{4}{5}E\right)^{1013} = \left(-\frac{4}{5}\right)^{1013} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[ 小点 4 点 ]

令和9年度 専攻科入学者選抜（学力）試験問題

数 学

No. 2 / 4

【2】関数  $f(x) = \frac{x}{e^x}$  について、次の各設問に答えよ.

[ 配点 30 点 ]

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$  を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

[ 小点 5 点 ]

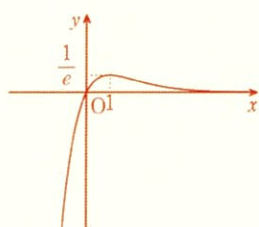
(2)  $y = f(x)$  の増減を調べ、極値を求めよ.

|         |           |            |               |            |          |
|---------|-----------|------------|---------------|------------|----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\cdots$   | 1             | $\cdots$   | $\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +          | 0             | -          |          |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | 0        |

$x=1$  のとき 極大値  $\frac{1}{e}$

[ 小点 10 点 ]

(3)  $y = f(x)$  のグラフの概形をかけ.



[ 小点 5 点 ]

(4) 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸および直線  $x=1$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ.

$$S = \int_0^1 \frac{x}{e^x} dx = \left[ -xe^{-x} - e^{-x} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$$

[ 小点 5 点 ]

(5) 上記の結果を使って、 $2 < e < 3$  であることを証明せよ.

(2) より  $f(1) > f(2)$  であるから  $\frac{1}{e} > \frac{2}{e^2}$  よって  $e > 2$

[ 小点 5 点 ]

(3), (4) より  $S < \frac{1}{e}$  であるから  $1 - \frac{2}{e} < \frac{1}{e}$  よって  $e < 3$  したがって  $2 < e < 3$

令和9年度 専攻科入学者選抜（学力）試験問題

数 学

No. 3 / 4

【3】 関数  $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$  について、次の各設問に答えよ。

[配点 18 点]

(1) 存在するならば、極限值  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  を求めよ。

[小点 5 点]

$x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  とおく。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 + 2r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} (1 + 2 \sin \theta \cos \theta) = 1 + \sin 2\theta$$

となる。したがって、点  $P(x, y)$  が各  $\theta$  に対する動径に沿って原点に近づくとき、 $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$  は近づく方向  $\theta$  によって、異なる値に近づく。よって、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  は存在しない。

(2) 関数  $f(x, y)$  について、 $(x, y) \neq (0, 0)$  かつ  $f(0, 0) = 0$  のとき、 $(0, 0)$  における連続性を調べよ。

[小点 3 点]

(1) より、極限值が存在しないので、 $f(0, 0) = 0$  と一致しない。したがって、 $f(x, y)$  は  $(0, 0)$  において、連続ではない。

(3) 関数  $f(x, y)$  について、 $(x, y) \neq (0, 0)$  かつ  $f(0, 0) = 0$  のとき、 $(0, 0)$  における偏微分可能性を調べよ。

[小点 10 点]

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}, \quad f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{k^2}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k}$$

となり、極限が存在しない。ゆえに、 $f_x(0, 0)$ ,  $f_y(0, 0)$  は値が有限値に定まらないので偏微分可能ではない。

【4】 広義積分  $\int_0^e \sqrt{x} \log x dx$  を求めよ。

[配点 10 点]

$$\int_0^e \sqrt{x} \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^e \sqrt{x} \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \log x \right]_{\varepsilon}^e - \frac{2}{3} \int_{\varepsilon}^e \sqrt{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \log \varepsilon - \frac{4}{9} e^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{9} e^{\frac{3}{2}}.$$

## 令和9年度 専攻科入学者選抜（学力）試験問題

数 学

No. 4 / 4

【5】 次の各設問に答えよ.

[配点 22 点]

(1) 微分方程式  $(1 + e^x)y' = y$  の一般解  $y$  を求めよ.

[小点 5 点]

変数分離形により,

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{1 + e^x} dx \Rightarrow \log |y| = \int \frac{e^x}{e^x(1 + e^x)} dx.$$

ここで,  $1 + e^x = t$  と置換することにより,  $e^x dx = dt$ ,  $e^x = t - 1$  であるから,

$$\log |y| = \int \frac{1}{t(t-1)} dt = \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \log |t-1| - \log |t| + C_1 = \log e^{C_1} \left| \frac{t-1}{t} \right| \Rightarrow y = \pm e^{C_1} \left( \frac{t-1}{t} \right).$$

よって,  $C = \pm e^{C_1}$  として,

$$y = \frac{Ce^x}{1 + e^x}.$$

ここで,  $C$  は任意定数である.(2) 微分方程式  $(1 + e^x)y' = y$  ( $y(0) = 1$ ) の ( ) 内の条件を満たす特殊解  $y$  を求めよ.

[小点 3 点]

 $y(0) = 1$  より,  $C = 2$  であるから,

$$y = \frac{2e^x}{1 + e^x}.$$

(3) (1) において,  $x \rightarrow \infty$  としたとき,  $y = y(x)$  の挙動を調べよ.

[小点 3 点]

 $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ce^x}{1 + e^x}$  は,  $C$  に収束する.
(4) 微分方程式  $y'' = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) の一般解  $y$  を求めよ.

[小点 5 点]

両辺を  $x$  で積分すると,  $y' = \log x + C_1$  となる.さらに, 両辺を  $x$  で積分すると,  $y = x \log x - x + C_1 x + C_2$  である. ここで,  $C_1, C_2$  は任意定数である.(5) 微分方程式  $y'' = \frac{1}{x}$  ( $x > 0, y(1) = 1, y'(1) = 3$ ) の ( ) 内の条件を満たす特殊解  $y$  を求めよ.

[小点 3 点]

 $y(1) = 1$  より,  $C_1 + C_2 = 2$ ,  $y'(1) = 3$  より,  $C_1 = 3$  であるから,  $C_2 = -1$ 

$$y = x \log x + 2x - 1.$$

(6) (4) において,  $x \rightarrow \infty$  としたとき,  $y = y(x)$  の挙動を調べよ.

[小点 3 点]

 $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \log x - x + C_1 x + C_2)$  は,  $\infty$  に発散する.