確率放物型偏微分方程式に対する逆問題について*

中村　真一**

On an inverse problem for the stochastic parabolic partial differential equation

Shin-ichi NAKAMURA

１．序論

領域 $D_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ において，次の初期・境界値混合問題を考える。

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + (q(t) + \varepsilon \dot{W}(t))u(x,t) \quad \text{in } D_T, \qquad (1.1)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,1], \qquad (1.2)$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \qquad (1.3)$$

ここで，$0 < \varepsilon << 1$ で $f(x)$ と $q(t)$ は次の条件を満足するものとし，

(1)　$f(x) \in H^2(0,1),\ f(x) > 0$ on $[0,1]$,　(1.4)

(2)　$f'(0) = f'(1) = 0$,　(1.5)

(3)　$q(t) \in C^0(0,T) \cap L^\infty(0,T)$ and

$q(t) \le 0$ on $[0,T]$,　(1.6)

$W(t)$ は固定された確率空間 (Ω, F, P) の原点を出発するブラウン運動とする。
このとき，問題（1.1），（1.2），（1.3）に対する一意的な解 $u^\varepsilon(x,t) \in L^2(\Omega; C(0,T; H^2(0,1)))$ が存在し，さらに条件（1.4），（1.6）と放物形方程式に対する最大値原理から $u^\varepsilon(x,t) > 0$ on $\overline{D_T}$ が従う（cf. [6]）。

この研究報告で考えたい逆問題とは，観測データ $\theta(t) \equiv u^\varepsilon(\bar{x},t), 0 < \bar{x} < 1, t \in [0,T]$ から $q(t)$ を決定する問題である。様々な逆問題が研究されているが（cf. [1]，[2]，[3]，etc. ），逆問題は一般的に非線形であるので，観測データから決定したい対象（今の場合は $q(t)$）を厳密に求めることは非常に難しく，また観測データから決定したい対象への安定性を欠く場合も数多く存在することが知られている（cf. [3]，[5]，etc. ）。

$\varepsilon = 0$ の場合（すなわちノイズが無い場合）は逆問題に対して厳密解が存在することを報告した[7]。

２．逆問題の厳密解（[7]）

$\varepsilon = 0$ に対する混合問題（1.1）～（1.6）に対する $\theta(t) \equiv u^0(\bar{x},t), 0 < \bar{x} < 1, t \in [0,T]$ から $q(t)$ を決定する逆問題は厳密解を持ち，次のように表示される

$$q(t) = \frac{(z_x(\bar{x},t))^2 - z(\bar{x},t)z_{xx}(\bar{x},t)}{(z(\bar{x},t))^2} - \left(\frac{z_x(\bar{x},t)}{z(\bar{x},t)}\right)^2 + \frac{\theta'(t)}{\theta(t)} \qquad (2.1)$$

ここで，$z(x,t)$ は次の混合問題の具体的な固有関数展開を持つ一意解である

$$z_t = z_{xx} \quad \text{in } D_T,$$

$$z(x,0) = f(x), \quad x \in [0,1],$$

＊　原稿受付　平成 26 年 11 月 25 日
** 佐世保工業高等専門学校　一般科目

$z_x(0,t)=0$, $z_x(1,t)=0$, $t\in[0,T]$。

３．$\varepsilon>0$ でノイズが存在する場合の解析

(1.1) を次の伊藤方程式に書き換え,

$$du^{\varepsilon}=(u_{xx}^{\varepsilon}+q(t)u^{\varepsilon})dt+\varepsilon u^{\varepsilon}dW(t) \qquad (3.1)$$

確率解析の結果を用いれば, (3.1) から

$$d\log u^{\varepsilon}=\left(\frac{u_{xx}^{\varepsilon}}{u^{\varepsilon}}+q(t)\right)dt+\varepsilon dW(t)-\frac{\varepsilon^2}{2}dt \qquad (3.2)$$

を得る。$w=-\partial_x\log u^{\varepsilon}$ と変換すれば w は次の混合問題を満たし, 一意的な解が存在する(cf. [4])。

$$w_t=w_{xx}-2ww_x \quad \text{in} \quad D_T,$$

$$w(x,0)=-\frac{f'(x)}{f(x)}, \quad x\in[0,1],$$

$$w(0,t)=0, \quad w(1,t)=0, \quad t\in[0,T].$$

$\dfrac{u_{xx}^{\varepsilon}}{u^{\varepsilon}}=w^2-w_x$ であることと (3.2) を用いれば,

$$d\log u^{\varepsilon}=(w^2-w_x+q(t))dt+\varepsilon dW(t)-\frac{\varepsilon^2}{2}dt$$

であり, この式は次のように書き換えることができる。

$$d\log u^{\varepsilon}=d\log u^0+\varepsilon dW(t)-\frac{\varepsilon^2}{2}dt$$

これより,

$$u^{\varepsilon}(\bar{x},t)=u^0(\bar{x},t)e^{\varepsilon W(t)-\frac{\varepsilon^2}{2}t}$$

を得る。両辺の期待値をとって $E[e^{\varepsilon W(t)}]=e^{\frac{\varepsilon^2}{2}t}$ であることを用いれば

$$E[u^{\varepsilon}(\bar{x},t)]=u^0(\bar{x},t)e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}t}E[e^{\varepsilon W(t)}]=u^0(\bar{x},t)=\theta(t)$$

となる。これを (2.1) に代入して

$$q(t)=\frac{(z_x(\bar{x},t))^2-z(\bar{x},t)z_{xx}(\bar{x},t)}{(z(\bar{x},t))^2}-\left(\frac{z_x(\bar{x},t)}{z(\bar{x},t)}\right)^2+\frac{\partial_t E[u^{\varepsilon}(\bar{x},t)]}{E[u^{\varepsilon}(\bar{x},t)]}$$

を得る。ただし, $z(x,t)$ は(2.1)を定義する際に用いられた混合問題の解である。

参考文献

[1] J. R. Cannon, Y. Lin, S. Wang, Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 33(1991), 149-163.

[2] H. W. Engl and W. Rundell, ed., Inverse problems in diffusion processes, S.I.A.M., 1995.

[3] V. Isakov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 2005.

[4] H. O. Kreiss and J. Lorenz, Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations, Academic Press, 1989.

[5] Z. Li and K. Zeng, An inverse problem in a parabolic equation, Electron. Jour. Differ. Equ. Conf 01(1997), 203-209.

[6] E. Pardoux, Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, Stochastics, 3(1979), 127-167.

[7] 中村真一, 放物形偏微分方程式の逆問題に対する厳密解, 佐世保高専研究報告, 42(2005), 37-38.