Burgers 方程式の Cole-Hopf 変換と 1 次元の非線形波動方程式について*

眞部 広紀 **　　冨永 泰佑 ***

*On Cole-Hopf transformation of Burgers equation and one-dimensional nonlinear wave equation**

Hiroki MANABE **　　Taisuke TOMINAGA ***

Key word: Cole-Hopf transformation, Burgers equation, nonlinear wave equation

Abstracts

In this report, we discuss Cole-Hopf transformation between Burgers equation and one-dimensional nonlinear wave equation.

本稿で使用する記号は以下のように設定する：

x, t : 独立変数

$f = f(x,t)$、$U = U(x,t)$、$p = p(x,t)$、$q = q(x,t)$: 2 変数関数

α, β, γ : 0 でない定数

関数は必要なだけ微分可能性や連続性をもつとする。偏微分は f_x, f_t, U_{xx} などのように添字で表す。

1　粘性 Burgers 方程式の Cole-Hopf 変換

関数の対応 $f \mapsto k\dfrac{f_x}{f} = U$ を Cole-Hopf 変換、あるいは Hopf-Cole 変換と呼ぶ。$k \neq 0$ のとき U の逆像は $\{\varphi \exp\left(\dfrac{1}{k}\displaystyle\int U dx\right) | \varphi = \varphi(t)\}$ となるので、Cole-Hopf 変換は上への対応（全射）になる。

定数 ν をパラメータにもつ非線形 2 階偏微分方程式

$$\nu U_{xx} + 2UU_x + p_x = \gamma U_t \tag{1}$$

を Burgers 方程式と呼ぶ。とくに $\nu \neq 0$ のときが粘性 Burgers 方程式であり、$\tilde{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\nu}$、$\tilde{p} = \dfrac{p}{\nu^2}$ とおくと、Cole-Hopf 変換 $U = \nu\dfrac{f_x}{f}$ によって、或る 1 変数関数 $\mu = \mu(t)$ を含む線形 2 階偏微分方程式 (熱方程式)

$$f_{xx} + (\tilde{p} - \mu)f = \tilde{\gamma} f_t \tag{2}$$

に帰着できることが知られている（例えば、[1], [2], [3], [4], [5]）。この手法は $\nu = 0$ の場合には適用できない。(1) が $\nu = 0$ のとき、非線形 1 階偏微分方程式 (非粘性 Burgers 方程式)

$$2UU_x + p_x = \gamma U_t \tag{3}$$

となる。次節では (3) の Cole-Hopf 変換と (2) に相当する方程式を与える。また、$\nu \neq 0$、$\nu = 0$ を区別しない (1) の Cole-Hopf 変換と (2) に相当する方程式は第 3 節で与える。

*原稿受付 平成 27 年 12 月 3 日
**佐世保工業高等専門学校一般科目
***佐世保工業高等専門学校電気電子工学科学生

2　非粘性 Burgers 方程式の Cole-Hopf 変換

Cole-Hopf 変換の計算公式を与えておく。

$$U_t = k\left(\frac{f_t}{f}\right)_x \tag{4}$$

$$U_x = k\frac{f_{xx}f-(f_x)^2}{f^2} \tag{5}$$

(4)(5) より、$\tilde{\gamma}=\dfrac{\gamma}{k}$、$\tilde{p}=\dfrac{p}{k^2}$ とおくと、

$$2UU_x-\gamma U_t+p_x=(U^2)_x-\gamma\left(k\frac{f_x}{f}\right)_t+p_x=k^2\left(\frac{(f_x)^2}{f^2}\right)_x-k^2\frac{\gamma}{k}\left(\frac{f_t}{f}\right)_x+k^2\left(\frac{1}{k^2}p\right)_x$$
$$=k^2\left\{\frac{(f_x)^2}{f^2}-\tilde{\gamma}\frac{f_t}{f}+\tilde{p}\right\}_x=k^2\left\{\frac{(f_x)^2-\tilde{\gamma}f_tf+\tilde{p}f^2}{f^2}\right\}_x$$

となるので、

$$2UU_x-\gamma U_t+p_x=k^2\left\{\frac{(f_x)^2-\gamma f_tf+\tilde{p}f^2}{f^2}\right\}_x \tag{6}$$

[命題 A] $U=k\dfrac{f_x}{f}$ が非粘性 Burgers 方程式 (3) の解となるための必要十分条件は、
f が或る 1 変数関数 $\mu=\mu(t)$ を含む非線形 1 階偏微分方程式

$$(f_x)^2+(\tilde{p}-\mu)f^2=\tilde{\gamma}f_tf \tag{7}$$

の解となることである。

[証明] (6) より、

$$2UU_x+p_x=\gamma U_t \iff 2UU_x-\gamma U_t+p_x=0 \iff k^2\left\{\frac{(f_x)^2-\tilde{\gamma}ff_t+\tilde{p}f^2}{f^2}\right\}_x=0$$
$$\iff \left\{\frac{(f_x)^2-\tilde{\gamma}ff_t+\tilde{p}f^2}{f^2}\right\}_x=0 \iff \frac{(f_x)^2-\tilde{\gamma}ff_t+\tilde{p}f^2}{f^2}=\mu(t)$$
$$\iff (f_x)^2-\tilde{\gamma}ff_t+\tilde{p}f^2=\mu f^2 \iff (f_x)^2+(\tilde{p}-\mu)f^2=\tilde{\gamma}f_tf$$

□

$\tilde{p}-\mu=q(x)$ のとき、(7) の両辺を f で割ると、

$$\frac{(f_x)^2}{f}+q(x)f=\tilde{\gamma}f_t \tag{8}$$

(8) の形の方程式は解析力学における 1 次元の Hamilton-Jacobi 方程式から導かれる。線形近似することにより、量子力学の波動方程式である線形 2 階偏微分方程式 (Schrödinger 方程式)

$$f_{xx}+q(x)f=\tilde{\gamma}f_t \tag{9}$$

が導出される（詳細は、例えば [6]9.5 節)。また、設定を 1 次元の自由粒子 ($q=V_0$: 定数) に単純化して (8) と (9) を代数的に導出することもできる (補遺)。

熱方程式と Schrödinger方程式は形式的に等価であることから、Cole-Hopf 変換は線形な波動方程式 (9) と粘性 Burgers 方程式の対応だけでなく、非線形な‘ 波動方程式 ’(8) と非粘性 Burgers 方程式の対応も与えている。

以下、$\tilde{p}-\mu=q=q(x,t)$ とおいて、(7) の性質を調べる。

q が x に関して偶関数 $(q(-x,t)=q(x,t))$ のとき、f が (9) の解ならば $g=g(x,t)=f(-x,t)$ も (9) の解である。(7) にも同様な性質がある：

[命題 B] q が x に関して偶関数のとき、(7) の解 f について、g も (7) の解である。

[証明] 仮定より $\{f_x(x,t)\}^2+q(x,t)\{f(x,t)\}^2=\tilde{\gamma}f_t(-x,t)f(-x,t)$ （x は任意）であるから、

$\{f_x(-x,t)\}^2+q(-x,t)\{f(-x,t)\}^2=\tilde{\gamma}f_t(-x,t)f(-x,t)$ が成り立つ。

$\{f_x(-x,t)\}^2=\{-g_x(x,t)\}^2=\{g_x(x,t)\}^2$、$q(-x,t)=q(x,t)$、$f_t(-x,t)=g_t(x,t)$ であるから、

$\{g_x(x,t)\}^2+q(x,t)\{g(x,t)\}^2=\tilde{\gamma}g_t(x,t)g(x,t)$ □

(7) には (9) にない解の冪乗に関する次の性質がある：

[命題 C] (7) の解 f について、$g=f^n(n$：整数、$(\neq 0,1))$ とおくと、

$$(g_x)^2+n^2qg^2=n\tilde{\gamma}g_tg$$

[証明] (8) の両辺に $(nf^{n-1})^2=n^2f^{2n-2}$ を掛けると、

$(nf^{n-1}f_x)^2+n^2qf^2f^{2n-2}=n\tilde{\gamma}(nf^{n-1}f_t)ff^{n-1}\quad \therefore ((f^n)_x)^2+n^2q(f^n)^2=n\tilde{\gamma}(f^n)_tf^n$

したがって、$(g_x)^2+n^2q(g)^2=n\tilde{\gamma}g_tg$ □

2.1 時間に依存しない解

f が (7) の解のとき、定数倍 cf は (7) の解である。また、$f_t=0$ ならば $\left(\dfrac{c}{f}\right)_t=0$ であり、命題 C より $\dfrac{c}{f}$ は (7) の解である。この逆も成り立つ：

[命題 D] $f_t=0, g_t=0$ のとき、

(i) f,g が (7) の解ならば、 $g=cf$ または $g=\dfrac{c}{f}$ （c は定数)

(ii) f が (7) の解であり、q が x に関して偶関数ならば、
$g=g(x,t)=f(-x,t)$ について、$g=\pm f$ または $g=\dfrac{c}{f}$ （c は定数)

[証明]

(i) 仮定より、$(g_x)^2+qg^2=0$、$(f_x)^2+qf^2=0$ であるから、それぞれに f^2 と g^2 を掛けると、

$(g_x)^2f^2+qg^2f^2=0$、$(f_x)^2g^2+qf^2g^2=0\quad \therefore (g_xf)^2+q(fg)^2=0$、$(gf_x)^2+q(fg)^2=0$

辺々を引くと、 $(g_xf)^2-(gf_x)^2=0\quad \therefore (g_xf-gf_x)(g_xf+gf_x)=0$

両辺を f^2 で割ると、$\dfrac{g_xf-gf_x}{f^2}\cdot(g_xf+gf_x)=0$ となるから、 $\left(\dfrac{g}{f}\right)_x\cdot(gf)_x=0$

$\therefore \left(\dfrac{g}{f}\right)_x=0$ または $(gf)_x=0$ 一方、仮定より、$\left(\dfrac{g}{f}\right)_t=0$ かつ $(gf)_t=0$ であるから、

$\dfrac{g}{f}=c$ または $gf=c$ したがって、$g=cf$ または $g=\dfrac{c}{f}$

(ii) 命題 B より g も (8) の解であるから、(i) より、$g=cf$ または $g=\dfrac{c}{f}$ （c は定数) となる。前者は、

$f(-x,t)=g(x,t)=cf(x,t)=cf(-(-x),t)=c^2f(-x,t)$ であることから、$c^2=1\ \therefore c=\pm 1$ □

2.2　変数分離形

$q = q(x)$ のとき、Schrödinger方程式 (あるいは熱方程式) (9) に変数分離法が適用できることはよく知られている（例えば [6]11.1,11.2 節を参照)。(7) についても以下のように変数分離法を適用できる：

(7) の両辺を f^2 で割ると、 $\dfrac{(f_x)^2}{f^2} + q = \tilde{\gamma}\dfrac{f_t f}{f^2}$　$\therefore \left(\dfrac{f_x}{f}\right)^2 + q = \tilde{\gamma}\dfrac{f_t}{f}$　$f(x,t) = T(t)X(x)$ を代入すると

$\dfrac{f_t}{f} = \dfrac{T'}{T}$、$\dfrac{f_x}{f} = \dfrac{X'}{X}$ であるから $\left(\dfrac{X'}{X}\right)^2 + q(x) = \tilde{\gamma}\dfrac{T'}{T}$　左辺は x の関数、右辺は t の関数なので、

$\tilde{\gamma}\dfrac{T'}{T} = s$ かつ $\left(\dfrac{X'}{X}\right)^2 + q(x) = s$ となる定数 s がある。それぞれ分母を払って T'、X' について解くと、

$T' = \dfrac{1}{\tilde{\gamma}}sT$ かつ $X' = \begin{cases} \pm\sqrt{s-q(x)}X & (s \geqq q(x)) \\ \pm i\sqrt{q(x)-s}X & (s \leqq q(x)) \end{cases}$　となる。それぞれの常微分方程式の解は

$T = K\exp\left(\dfrac{s}{\tilde{\gamma}}t\right)$ $(K:$ 定数$)$ かつ $X = \begin{cases} L\exp\left(\pm\displaystyle\int\sqrt{s-q(x)}\,dx\right) & (s \geqq q(x)) \\ L\exp\left(\pm i\displaystyle\int\sqrt{q(x)-s}\,dx\right) & (s \leqq q(x)) \end{cases}$ $(L:$ 定数$)$ となるので、

$$f = TX = \begin{cases} A\exp\left(\dfrac{s}{\tilde{\gamma}}t \pm \displaystyle\int\sqrt{s-q(x)}\,dx\right) & (s \geqq q(x)) \\ A\exp\left(\dfrac{s}{\tilde{\gamma}}t \pm i\displaystyle\int\sqrt{q(x)-s}\,dx\right) & (s \leqq q(x)) \end{cases} \qquad (A:\text{定数})$$

$\tilde{\gamma}$ が純虚数 $(\tilde{\gamma} = \check{\gamma}i$、$\check{\gamma}:$ 実数$)$ のときは、

$$f = \begin{cases} A\exp\left(-i\dfrac{s}{\check{\gamma}}t \pm \displaystyle\int\sqrt{s-q(x)}\,dx\right) & (s \geqq q(x)) \\ A\exp\left(i\left\{-\dfrac{s}{\check{\gamma}}t \pm \displaystyle\int\sqrt{q(x)-s}\,dx\right\}\right) & (s \leqq q(x)) \end{cases} \qquad (A:\text{定数})$$

$q = q(x)$ を実関数、s を正の実定数として、f の例を以下に挙げる：

<u>$q(x) = V_0$　(実定数) の場合</u>

$$f = \begin{cases} A\exp\left(-i\dfrac{s}{\check{\gamma}}t \pm \sqrt{s-V_0}\,x\right) & (s \geqq V_0) \\ A\exp\left(i\left\{-\dfrac{s}{\check{\gamma}}t \pm \sqrt{V_0-s}\,x\right\}\right) & (s \leqq V_0) \end{cases}$$

<u>$q(x) = V_1 x$　(V_1 : 正の実定数) の場合</u>

$$f = \begin{cases} A\exp\left(-i\dfrac{s}{\check{\gamma}}t \mp \dfrac{2}{3V_1}(s-V_1x)\sqrt{s-V_1x}\right) & \left(\dfrac{s}{V_1} \geqq x\right) \\ A\exp\left(i\left\{-\dfrac{s}{\check{\gamma}}t \pm \dfrac{2}{3V_1}(V_1x-s)\sqrt{V_1x-s}\right\}\right) & \left(\dfrac{s}{V_1} \leqq x\right) \end{cases}$$

$q(x) = V_2 x^2 \quad (V_2$：正の実定数$)$ の場合

$$f = \begin{cases} A\exp\left(-i\dfrac{s}{\tilde{\gamma}}t \pm \dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{s - V_2 x^2} + \dfrac{s}{\sqrt{V_2}}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{V_2}{s}}x\right)\right\}\right) & \left(-\sqrt{\dfrac{s}{V_2}} \leqq x \leqq \sqrt{\dfrac{s}{V_2}}\right) \\ A\exp\left(i\left\{-\dfrac{s}{\tilde{\gamma}}t \pm \dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{V_2 x^2 - s} - \dfrac{s}{\sqrt{V_2}}\ln\left(x + \sqrt{\dfrac{V_2 x^2 - s}{V_2}}\right)\right\}\right\}\right) & \left(x \leqq -\sqrt{\dfrac{s}{V_2}} \text{ または } \sqrt{\dfrac{s}{V_2}} \leqq x\right) \end{cases}$$

3　Burgers 方程式の Cole-Hopf 変換

Cole-Hopf 変換の計算公式を追加する。$\varepsilon = \dfrac{\nu}{k}$ とおくと、

$$\nu U_{xx} = \nu (U_x)_x = \nu\left\{\left(k\frac{f_x}{f}\right)_x\right\}_x = \nu k\left\{\left(\frac{f_x}{f}\right)_x\right\}_x = k^2\frac{\nu}{k}\left\{\frac{f_{xx}f - (f_x)^2}{f^2}\right\}_x = k^2\varepsilon\left\{\frac{f_{xx}f - (f_x)^2}{f^2}\right\}_x$$

であるから、

$$\nu U_{xx} = k^2\left\{\frac{\varepsilon f_{xx}f - \varepsilon (f_x)^2}{f^2}\right\}_x \tag{10}$$

また、(6) と (10) より、

$$\nu U_{xx} + 2UU_x - \gamma U_t + p_x = k^2\left\{\frac{\varepsilon f_{xx}f - \varepsilon (f_x)^2}{f^2}\right\}_x + k^2\left\{\frac{(f_x)^2 - \tilde{\gamma} f_t f + \tilde{p} f^2}{f^2}\right\}_x$$

$$= k^2\left\{\frac{\varepsilon f_{xx}f - \varepsilon (f_x)^2 + (f_x)^2 - \tilde{\gamma} f_t f + \tilde{p} f^2}{f^2}\right\}_x = k^2\left\{\frac{\varepsilon f_{xx}f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 - \tilde{\gamma} f_t f + \tilde{p} f^2}{f^2}\right\}_x$$

となるので、

$$\nu U_{xx} + 2UU_x - \gamma U_t + p_x = k^2\left\{\frac{\varepsilon f_{xx}f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 - \tilde{\gamma} f_t f + \tilde{p} f^2}{f^2}\right\}_x \tag{11}$$

[命題 E] U が Burgers 方程式 (1) の解であるための必要十分条件は、

f が或る 1 変数関数 $\mu = \mu(t)$ 含む偏微分方程式

$$\varepsilon f_{xx}f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 + (\tilde{p} - \mu)f^2 = \tilde{\gamma} f_t f \tag{12}$$

の解となることである。

[証明] (11) より、

$$\nu U_{xx} + 2UU_x + p_x = \gamma U_t \iff \nu U_{xx} + 2UU_x - \gamma U_t + p_x = 0$$

$$\iff k^2 \left\{ \frac{\varepsilon f_{xx} f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 - \gamma f_t f + \tilde{p} f^2}{f^2} \right\}_x = 0 \iff \left\{ \frac{\varepsilon f_{xx} f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 - \tilde{\gamma} f_t f + \tilde{p} f^2}{f^2} \right\}_x = 0$$

$$\iff \frac{\varepsilon f_{xx} f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 - \tilde{\gamma} f_t f + \tilde{p} f^2}{f^2} = \mu(t) \iff \varepsilon f_{xx} f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 - \tilde{\gamma} f_t f + \tilde{p} f^2 = \mu(t) f^2$$

$$\iff \varepsilon f_{xx} f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 + (\tilde{p} - \mu) f^2 = \tilde{\gamma} f_t f \qquad \square$$

※ $\varepsilon = 0$ ($\iff \nu = 0$) のときが命題 A((6) と (7) の場合) に対応する。また、$\varepsilon = 1$ ($\iff \nu = k$) のとき限り (12) は線形となり、第 1 節（(1) と (2) の場合) になる。

4　共通解

再び $\tilde{p} - \mu = q = q(x,t)$ とする。(12) はパラメータ ε を含んでいるので、一般的にその解は ε に依存すると考えられるが、本節では単純な場合として、ε に依存しない解を調べる。

[命題 F] f が任意の ε に対して (12) の解であるための必要十分条件は、
f が (2) と (7) の共通解となることである。

[証明]

$$\varepsilon f_{xx} f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 + q f^2 = \tilde{\gamma} f_t f$$

$$\iff \varepsilon f_{xx} f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 + \{\varepsilon + (1-\varepsilon)\} q f^2 = \{\varepsilon + (1-\varepsilon)\} \tilde{\gamma} f_t f$$

$$\iff \varepsilon f_{xx} f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 + \varepsilon q f^2 + (1-\varepsilon) q f^2 = \varepsilon \tilde{\gamma} f_t f + (1-\varepsilon) \tilde{\gamma} f_t f$$

$$\iff \varepsilon f_{xx} f + \varepsilon q f^2 - \varepsilon \tilde{\gamma} f_t f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 + (1-\varepsilon) q f^2 - (1-\varepsilon) \tilde{\gamma} f_t f = 0$$

$$\iff \varepsilon\{f_{xx} f + q f^2 - \tilde{\gamma} f_t f\} + (1-\varepsilon)\{(f_x)^2 + q f^2 - \tilde{\gamma} f_t f\} = 0$$

ここで、任意の ε に対して $\varepsilon M + (1-\varepsilon) N = 0 \iff M = 0$ かつ $N = 0$ であることから、

f が任意の ε に対して $\varepsilon f_{xx} f + (1-\varepsilon)(f_x)^2 + q f^2 = \tilde{\gamma} f_t f \iff \begin{cases} f_{xx} + q f = \tilde{\gamma} f_t \\ (f_x)^2 + q f^2 = \tilde{\gamma} f_t f \end{cases}$

$\square$

(2) と (7) の共通解の例として、$q = V_0, V_1 x$　$(V_0, V_1 (\neq 0)$：実定数）の場合の解を与える。

<u>$q = V_0$ の場合</u>

$\begin{cases} f_{xx} + V_0 f = \tilde{\gamma} f_t \\ (f_x)^2 + V_0 f^2 = \tilde{\gamma} f_t f \end{cases}$ のとき、$f = A \exp\left(-i \dfrac{(c^2 + V_0)t}{\tilde{\gamma}} + cx\right)$　　(A は定数、c：実定数)

[証明]

$$\begin{cases} f_{xx} + V_0 f = \tilde{\gamma} f_t \\ (f_x)^2 + V_0 f^2 = \tilde{\gamma} f_t f \end{cases} \iff \begin{cases} f_{xx} f = (f_x)^2 \\ f_{xx} + V_0 f = \tilde{\gamma} f_t \end{cases} \iff \begin{cases} f = \phi(t) \exp(\psi(t) x) \\ f_{xx} + V_0 f = \tilde{\gamma} f_t \end{cases}$$

であるから、$f_t = \left\{ \dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)} + \psi'(t) x \right\} f$、$f_{xx} = (\psi(t))^2 f$ を第 2 式に代入すると、

$$(\psi(t))^2 f + V_0 f = \left\{\tilde{\gamma}\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} + \tilde{\gamma}\psi'(t)x\right\} f \qquad \therefore (\psi(t))^2 + V_0 = \tilde{\gamma}\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} + \tilde{\gamma}\psi'(t)x$$

これは x の恒等式であるから係数を比較すると、

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}\psi'(t) = 0 \\ (\psi(t))^2 + V_0 = \tilde{\gamma}\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \psi'(t) = 0 \\ \phi'(t) = \dfrac{1}{\tilde{\gamma}}\{(\psi(t))^2 + V_0\}\phi(t) \end{cases}$$

第 1 式より、$\psi(t) = c$ 　(c は定数) となるので、第 2 式に代入すると、

$$\phi'(t) = \frac{1}{\tilde{\gamma}}(c^2 + V_0)\phi(t) \qquad \therefore \phi(t) = A\exp\left(\frac{(c^2+V_0)t}{\tilde{\gamma}}\right) \quad (A \text{ は定数})$$

したがって、 $f = \phi(t)\exp(\psi(t)x) = A\exp\left(\dfrac{(c^2+V_0)t}{\tilde{\gamma}} + cx\right) = A\exp\left(-i\dfrac{(c^2+V_0)t}{\check{\gamma}} + cx\right)$

□

<u>$p = V_1 x$ の場合</u>

$$\begin{cases} f_{xx} + V_1 x f = \tilde{\gamma} f_t \\ (f_x)^2 + V_1 x f^2 = \tilde{\gamma} f_t f \end{cases} \text{ のとき、}$$

$$f = A\exp\left(i\left\{\frac{V_1^2}{3\check{\gamma}^3}t^3 - \frac{c^2}{\check{\gamma}}t - \frac{V_1}{\check{\gamma}}tx\right\} + \left\{-\frac{V_1 c}{\check{\gamma}^2}t^2 + \frac{c^3}{3V_1} + cx\right\}\right) \qquad (A：\text{定数、}c：\text{実定数})$$

[証明]

$$\begin{cases} f_{xx} + V_1 x f = \tilde{\gamma} f_t \\ (f_x)^2 + V_1 x f^2 = \tilde{\gamma} f_t f \end{cases} \iff \begin{cases} f_{xx} f = (f_x)^2 \\ f_{xx} + V_1 x f = \tilde{\gamma} f_t \end{cases} \iff \begin{cases} f = \phi(t)\exp(\psi(t)x) \\ f_{xx} + V_1\, x f = \tilde{\gamma} f_t \end{cases}$$

であるから、$f_t = \left\{\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)} + \psi'(t)x\right\} f$、$f_{xx} = (\psi(t))^2 f$ を第 2 式に代入すると、

$$(\psi(t))^2 f + V_1 x f = \left\{\tilde{\gamma}\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} + \tilde{\gamma}\psi'(t)x\right\} f \qquad \therefore (\psi(t))^2 + V_1 x = \tilde{\gamma}\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} + \tilde{\gamma}\psi'(t)x$$

これは x の恒等式であるから係数を比較すると、$\begin{cases} \tilde{\gamma}\psi'(t) = V_1 \\ (\psi(t))^2 = \tilde{\gamma}\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \psi'(t) = \dfrac{V_1}{\tilde{\gamma}} \\ \phi'(t) = \dfrac{1}{\tilde{\gamma}}(\psi(t))^2\phi(t) \end{cases}$

第 1 式より、$\psi(t) = \dfrac{V_1}{\tilde{\gamma}}t + c$ 　(c は定数) となるので、第 2 式に代入すると、

$$\phi'(t) = \frac{1}{\tilde{\gamma}}\left\{\left(\frac{V_1}{\tilde{\gamma}}t + c\right)^2\right\}\phi(t) \quad \therefore \phi(t) = A\exp\left(\frac{1}{3V_1}\left(\frac{V_1}{\tilde{\gamma}}t + c\right)^3\right) \quad (A \text{ は定数})$$

したがって、

$$f = \phi(t)\exp(\psi(t)x) = A\exp\left(\frac{1}{3V_1}\left(\frac{V_1}{\tilde{\gamma}}t + c\right)^3 + \left(\frac{V_1}{\tilde{\gamma}}t + c\right)x\right)$$

$$= A\exp\left(\frac{1}{3V_1}\left(-i\frac{V_1}{\check{\gamma}}t + c\right)^3 + \left(-i\frac{V_1}{\check{\gamma}}t + c\right)x\right)$$

$$= A\exp\left(\frac{1}{3V_1}\left\{\left(-i\frac{V_1}{\breve{\gamma}}t\right)^3+3\left(-i\frac{V_1}{\breve{\gamma}}t\right)^2c+3\left(-i\frac{V_1}{\breve{\gamma}}t\right)c^2+c^3\right\}+\left(-i\frac{V_1}{\breve{\gamma}}t\right)x+cx\right)$$

$$= A\exp\left(i\frac{1}{3V_1}\frac{V_1^3}{\breve{\gamma}^3}t^3-3\frac{1}{3V_1}\frac{V_1^2c}{\breve{\gamma}^2}t^2-3i\frac{1}{3V_1}\frac{V_1c^2}{\breve{\gamma}}t+\frac{1}{3V_1}c^3-i\frac{V_1}{\breve{\gamma}}tx+cx\right)$$

$$= A\exp\left(i\frac{V_1^2}{3\breve{\gamma}^3}t^3-i\frac{c^2}{\breve{\gamma}}t-i\frac{V_1}{\breve{\gamma}}tx+\frac{1}{3V_1}c^3-\frac{V_1c}{\breve{\gamma}^2}t^2+cx\right)$$

$$= A\exp\left(i\left\{\frac{V_1^2}{3\breve{\gamma}^3}t^3-\frac{c^2}{\breve{\gamma}}t-\frac{V_1}{\breve{\gamma}}tx\right\}+\left\{-\frac{V_1c}{\breve{\gamma}^2}t^2+\frac{c^3}{3V_1}+cx\right\}\right)$$

□

まとめ

粘性 Burgers方程式が Cole-Hopf変換によって、空間 1 次元の熱方程式 (2) に帰着されることはよく知られている。本稿では、熱方程式と形式的に等価な Schrödinger方程式の導出過程に非線形な方程式が現れることに着目し、非粘性 Burgers方程式が Cole-Hopf変換によって非線形方程式 (7) に帰着されることを示した。また、(7) について解の冪乗、時間に依存しない解、偶奇性、変数分離解を調べた。さらに、Burgers方程式を Cole-Hopf 変換させた (12) を導き、その解の例として (2) と (7) の共通解を与えた。

謝辞

本稿を執筆する契機を与えて下さった津山工業高等専門学校一般科目の松田修先生と本校一般科目の濱田裕康先生に深く感謝申し上げます。

参考文献

[1] H.Batman: Some recent researches on the motion of fluids. Monthly Weather Review 1915;April

[2] J.D.Cole: On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics, Quart. Appl. Math.1951;9:225.

[3] E.Hopf: The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$, Comm.Pure.Appl.Math.1950;3:201

[4] J.M.Burgers: A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Adv.Appl. Mech., 1(1948).171-199

[5] F. Gesztesy, H. Holden: The Cole-Hopf and Miura transformations revisited,

[6] 須藤靖: 解析力学・量子論; 東京大学出版会

補遺：1 次元の波動方程式の導出

波形を変えずに一定速度で移動する波動は進行波と呼ばれている。空間 1 次元に単純化した時空モデルにおいて、進行波は $f = \psi(\alpha x + \beta t)$　(ψ : 1 変数関数) の関数形で表される。指数関数型の進行波 $f = Ae^{\alpha x + \beta t}$　(A : 定数) については、

$$\begin{cases} f_t = \beta f \\ f_x = \alpha f \\ f_{xx} = \alpha^2 f \end{cases} \tag{i}$$

が成り立つので、f は偏微分演算の固有ベクトルであり、α, β は固有値となる。Schrödinger方程式は指数関数型の進行波の中で自由粒子の物質波を特徴付ける条件として導かれる（例えば [6] 参照）:

Newton 力学において、質量 m 、速度 v の自由粒子の運動量を $\mathrm{p} = \mathrm{m\,v}$ 、ポテンシャルを V_0（定数）とするとき、力学的エネルギーは $E = \frac{1}{2}\,\mathrm{m\,v}^2 + V_0$ となるから、

$$\frac{\mathrm{p}^2}{2\,\mathrm{m}} + V_0 = E \tag{ii}$$

が成り立つ。一方、波長 λ、振動数 n、振幅 A の複素単振動の進行波 $f = A \exp 2\pi i \left(\frac{x}{\lambda} - \mathrm{n}t\right)$ に、Einstein-de Broglieの関係式 $\frac{h}{\lambda} = \mathrm{p}$、$E = h\mathrm{n}$ （h は Planck定数）を代入すると、物質波 $f = A \exp\left(\frac{2\pi i \mathrm{p}}{h} x - \frac{2\pi i E}{h} t\right)$ が得られる。$\frac{2\pi i \mathrm{p}}{h} = \alpha$、$-\frac{2\pi i E}{h} = \beta$ となるので、$\mathrm{p} = \frac{h}{2\pi i}\alpha$、$E = -\frac{h}{2\pi i}\beta$ とおいて (ii) に代入すると、

$$\alpha^2 + \hat{V}_0 = \hat{\gamma}\beta \qquad \left(\hat{V}_0 = -\frac{8m\pi^2}{h^2}V_0\,, \quad \hat{\gamma} = -\frac{4\pi m}{h}i\right) \tag{iii}$$

この両辺に f を掛けて $\alpha(\alpha f) + \hat{V}_0 f = \hat{\gamma}(\beta f)$ とすると (i) より、線形 2 階偏微分方程式 (Schrödinger方程式) が得られる：

$$f_{xx} + \hat{V}_0 f = \hat{\gamma} f_t \tag{iv}$$

(iii) の両辺に f を掛けるかわりに f^2 を掛けて $(\alpha f)^2 + \hat{V}_0 f^2 = \hat{\gamma}(\beta f) f$ とすると (i) より、(iv) の Schrödinger 方程式とは異なる波動方程式 (非線形 1 階偏微分方程式) が得られる：

$$(f_x)^2 + \hat{V}_0 f^2 = \hat{\gamma} f_t f \tag{v}$$